

- 1) Calculer les dimensions de F et G
- 2) Déterminer $F \cap G$ et $F + G$
- 3) Est-ce que la somme entre F et G est directe ? (c.à.d. : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$)

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
 $\dim F = 2$
 $\dim G = 2$

Exercice 7: Considérons les deux s.e.v. :

$F = \{(u = (1, -1, 2, -2); v = (4, 0, 1, -5); w = (3, 1, -1, -1))\}$, $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge (x - y + 2z + t = 0)\}$

- 1) Déterminer les dimensions de G , $F \cap G$ et $F + G$
- 2) Trouver un sous-espace H de $\mathbb{R}^4$ tel que : $(F + G) \oplus H = \mathbb{R}^4$

Exercice 8 (supplémentaire)

1. Soient $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$, $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ et $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x, z = 3x \text{ et } t = 4x\}$

- 1) Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$
- 2) Déterminer $F_1 + F_2$
- 3) Montrer que $F_1 \oplus F_3 = \mathbb{R}^4$

ii. Considérons le K -espace vectoriel E tel $\dim E = 5$ et soit $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ base de E

Soient les deux ensembles $F = \{\sum_{i=1}^5 x_i a_i : x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 - x_5 = 0\}$

et $G = \{(u, v, w) \text{ avec } u = a_1 + a_4 + a_5, v = a_2 + a_3 \text{ et } w = a_1 + a_5\}$

- i. Montrer que F est un s.e.v. de E et calculer $\dim F$
- ii. Montrer que $G = \{\sum_{i=1}^5 x_i a_i : x_1 = x_2 \wedge x_3 = x_4 + x_5\}$ et calculer $\dim G$
- iii. Calculer $\dim F \cap G$, en déduire $F + G = E$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Réponse : 1. 2) $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4$

3) On trouve que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et $B = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (1, 2, 1, 4)\}$ est une base de $F_1 + F_3$ ce qui fait que $\dim(F_1 + F_3) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ donc $F_1 + F_3 = \mathbb{R}^4$

ainsi $F_1 \oplus F_3 = \mathbb{R}^4$

i) On trouve que $B_F = \{a_1 + a_2, a_2, a_4 - a_5\}$ est une base de F donc $\dim F = 3$

ii) $\dim G = 3$, iii) $\dim F \cap G = 1$

$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 1 = 5$

Donc : $\dim(F + G) = \dim E$ ainsi : $F + G = E$. F et G ne sont pas supplémentaires (la somme n'est pas directe) car $F \cap G \neq \{0\}$ puisque $\dim(F \cap G) = 1 \neq 0$

Remarque : • $\dim F = \dim G \Rightarrow F = G$ (F et G sont isomorphes - pas forcément égaux -)

• $(\dim F = \dim G) \text{ et } (F \subseteq G) \Rightarrow F = G$

Série sur les espaces vectoriels

Exercice 1 : Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = z\}$; $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$; $E_3 = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) = 0\}$;
 $E_4 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$; $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / P'(-1) = 0\}$; $E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}$;
 $E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ impaire}\}$

Exercice 2 : I- 1) Pour quelle valeur de k , le vecteur $(1, -2, k)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\varphi = (1, 1, 1)$ et $\psi = (1, 2, 3)$?

2) Montrer que les vecteurs $u = (1, 1, 1)$; $v = (2, -1, 1)$; $w = (1, 2, 3)$ engendrent $\mathbb{R}^3$

II- Soit $A = \{u, v, w\}$ une partie génératrice du K -espace vectoriel E .

4) Montrer que $B = \{u, \alpha v, w\}$, avec $\alpha \in K^*$; $C = \{u, v + \alpha u + \beta w, w\}$ (avec $\alpha, \beta \in K$) sont également des parties génératrices de E ?

5) Soit $F = \{a = (3, 2); b = (-1, 0)\}$ et $G = \{c = i + 3; d = 2i, m = 5\}$

Sous-quelle forme s'écrivent les éléments de F et G ? (On considère le corps $K = \mathbb{R}$)

Exercice 3 : a) Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

$A = \{(1, 0, 1); (1, 2, 2)\}$; $B = \{(2, 5), (1, -3), (0, -1)\}$; $C = \{e^x, e^{2x}\}$; $D = \{x, \sin x\}$; $M = \{u = (1, 2, 1, 2, 1); v = (2, 1, 2, 1, 2); w = (1, 0, 1, 1, 0); t = (0, 1, 0, 0, 1)\}$

b) Soit $H = \{u, v, w\}$ une partie libre d'un K -espace vectoriel E . Les systèmes suivants sont libres ou liés ? $S_1 = \{u, v\}$; $S_2 = \{u, v + w\}$; $S_3 = \{u, v, w, 0\}$; $S_4 = \{u, v, u\}$

Exercice 4 : I) Trouver la dimension de chaque s.e.v :

• $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \wedge t = 2z\}$

• $G = \{a = (1, 2, 2, 3); b = (0, 1, 1, 1); c = (1, 1, 1, 1); d = (2, 4, 4, 5)\}$

• $\mathbb{R}_n[x]$ (espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n)

• $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = P(-1) = 0\}$

Exercice 5 : 1) Montrer que $B = \{u = (1, 1, 1, 1); v = (1, -1, 1, -1); w = (1, -2, 1, 0); t = (0, 0, -1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Donner les coordonnées du vecteur $\chi = (0, 3, -1, 2)$ par rapport à cette base.

2) Déterminer une base B_F pour le s.e.v $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

3) compléter cette base B_F en une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire de F

Exercice 6 : Soient les s.e.v : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(a, -a, 3a); a \in \mathbb{R}\}$