

Enoncé

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène d'ordre 3, telle que $f(1, 0) = 2$.
Trouver $f(5, 0)$ et déterminer f sachant que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (x + 2 \sin y, y + 3 \sin x).$$

Montrer que φ est différentiable en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer sa matrice jacobienne $J_{(x,y)}\varphi$ et en déduire $(d_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi)(1, 2)$.

Exercice 3.

Résoudre l'EDP suivante, où Z est supposée de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

(On pourra utiliser les variables auxiliaires : $u = x + y$ et $v = x - y$.)

Exercice 4.

Etudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y - x - 4y.$$

- Dérivées partielles premières de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 4.$$

- Points critiques de f :

$$\begin{aligned} ((x, y) \text{ est critique pour } f) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\partial f / \partial x)(x, y) = 0 \\ (\partial f / \partial y)(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow ((x = -2 \text{ ou } x = 2) \text{ et } 2xy - 1 = 0) \\ &\Leftrightarrow ((x = -2 \text{ et } y = -1/4) \text{ ou } (x = 2 \text{ et } y = 1/4)). \end{aligned}$$

Donc, les points critiques de f sont $(-2, -1/4)$ et $(2, 1/4)$.

- Dérivées partielles secondes et déterminant hessien de f :

Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

et son déterminant hessien est

$$H_{(x,y)}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2.$$

- Nature de chaque point critique :

$$\Leftrightarrow \left((x = -2 \text{ ou } x = 2) \text{ et } 4xy - 1 = 0 \right) \\ \Leftrightarrow \left((x = -2 \text{ et } y = -1/4) \text{ ou } (x = 2 \text{ et } y = 1/4) \right).$$

Donc, les points critiques de f sont $(-2, -1/4)$ et $(2, 1/4)$.

- Dérivées partielles secondes et déterminant hessien de f :

Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

et son déterminant hessien est

$$H_{(x,y)}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2.$$

- Nature de chaque point critique :

- Nature de $(-2, -1/4)$:

$$\left(H_{(-2, -1/4)}f = -16 < 0 \right) \Rightarrow \left(f \text{ présente un col en } (-2, -1/4) \right)$$

- Nature de $(2, 1/4)$:

$$\left(H_{(2, 1/4)}f = -16 < 0 \right) \Rightarrow \left(f \text{ présente un col en } (2, 1/4) \right)$$

- Conclusion :

f présente deux cols, l'un en $(-2, -1/4)$ et l'autre en $(2, 1/4)$.

notées sur deux (2) points.

Exercice 1

4.5 points

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x \sin y, y \cos x)$, et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(u, v) = u^2 + 3v + 1$.

- i. Expliciter $g \circ f(x, y)$, et en déduire $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$;
- ii. Calculer les matrices jacobiniennes $J_{(x,y)}f$ et $J_{(u,v)}g$. En déduire $J_{(x,y)}(g \circ f)$ ainsi que $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$;
- iii. En utilisant la formule de dérivation de « fonctions composées », recalculer $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$.

Exercice 2

4.5 points

Etudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 3

4.5 points

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

à l'aide du changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$.

4.5 points

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \\
&= \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}[Z(x, y)] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}[\tilde{Z}(u, v)] \\
&= \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \\
&= \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \right] \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial v \partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial v^2}(u, v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Z}{\partial y}(x, y) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial u}(u, v) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) \right] \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial u^2}(u, v) - \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial v \partial u}(u, v) - \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial v^2}(u, v).
\end{aligned}$$

et comme $\tilde{Z}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, notre EDP équivaut à :

-

Donc

$$\begin{aligned}
 (d_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi)(1, 2) &= [J_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\frac{\pi}{4} \\ 3\cos\frac{\pi}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} \\ 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(d_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi)(1, 2) = \left(1 + 2\sqrt{2}, 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Exercice 3. On se propose de résoudre l'EDP :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

où Z est supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Pour ce faire, on introduit les variables auxiliaires, $u = x + y$ et $v = x - y$, et on pose $Z(x, y) = \tilde{Z}(u, v)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}[Z(x, y)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial u}[\tilde{Z}(u, v)]
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (x + 2 \sin y, y + 3 \sin x).$$

- Montrons que φ est différentiable en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

La transformation φ est de la forme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varphi_1 = \text{pr}_1 + 2 \sin \circ \text{pr}_2$ et $\varphi_2 = \text{pr}_2 + 3 \sin \circ \text{pr}_1$, où pr_1 et pr_2 sont les projections canoniques de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction « sinus » est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les projections canoniques pr_1 et pr_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on conclut que les fonctions φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et par suite φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

- calculons la matrice jacobienne $J_{(x,y)}\varphi$ de φ :

Nous venons juste de démontrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Cela veut donc dire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, notée $d_{(x,y)}\varphi$ et appelée différentielle de φ en (x, y) , telle que

$$\lim_{(x', y') \rightarrow (x, y)} \frac{\| \varphi(x', y') - \varphi(x, y) - (d_{(x,y)}\varphi)(x' - x, y' - y) \|}{\| (x', y') - (x, y) \|} = 0$$

et nous savons (d'après le cours) que la matrice de $d_{(x,y)}\varphi$ s'appelle matrice jacobienne de φ en (x, y) et se calcule par la formule :

$$J_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$\lim_{(x', y') \rightarrow (x, y)} \frac{\| \varphi(x', y') - \varphi(x, y) - (d_{(x, y)}\varphi)(x' - x, y' - y) \|}{\| (x', y') - (x, y) \|} = 0$$

et nous savons (d'après le cours) que la matrice de $d_{(x, y)}\varphi$ s'appelle matrice jacobienne de φ en (x, y) et se calcule par la formule :

$$J_{(x, y)}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{J_{(x, y)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cos y \\ 3 \cos x & 1 \end{pmatrix}}$$

• Déduisons $(d_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi)(1, 2)$:

On sait que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, (d_{(x, y)}\varphi)(h_1, h_2) = [J_{(x, y)}\varphi] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}(u, v) - \frac{\partial^2 Z}{\partial v \partial u}(u, v) - \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}(u, v),$$

et comme $\tilde{Z}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, notre EDP équivaut à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial u \partial v}(u, v) = 0,$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial v}(u, v) = k(v), \text{ où } k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est quelconque de classe } \mathcal{C}^1,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{Z}(u, v) = f(u) + g(v), \text{ où } f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont quelconques de classe } \mathcal{C}^2,$$

et à la fin, la solution générale de notre EDP est :

$$\boxed{Z(x, y) = f(x + y) + g(x - y), \text{ où } f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont quelconques de classe } \mathcal{C}^2.}$$

Enoncé

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène d'ordre 3, telle que $f(1, 0) = 2$.
Trouver $f(5, 0)$ et déterminer f sachant que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (x + 2 \sin y, y + 3 \sin x).$$

Montrer que φ est différentiable en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer sa matrice jacobienne $J_{(x,y)}\varphi$ et en déduire $(d_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})}\varphi)(1, 2)$.

Exercice 3.

Résoudre l'EDP suivante, où Z est supposée de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

(On pourra utiliser les variables auxiliaires : $u = x + y$ et $v = x - y$.)

Exercice 4.

Etudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y - x - 4y.$$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène d'ordre 3, telle que $f(1, 0) = 2$.

- Déterminons $f(5, 0)$: On a

$$\begin{aligned} f(5, 0) &= f(5(1, 0)) \\ &= 5^3 \times f(1, 0) \text{ (car } f \text{ est homogène d'ordre 3)} \\ &= 125 \times 2 \text{ (car } f(1, 0) = 2) \\ &= 250. \end{aligned}$$

- Déterminons f sachant que $\partial f / \partial x = \partial f / \partial y$.

Par hypothèse, f est homogène d'ordre 3 et cela équivaut à l'identité d'Euler :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f.$$

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

on arrive à

$$(x + y) \frac{\partial f}{\partial x} - 3f = 0$$

et la solution générale de cette EDP est donnée par la formule

$$f(x, y) = k(y) e^{-\int \frac{3}{(x+y)} dx}$$

où $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque, c'est-à-dire :

$$f(x, y) = C(y)(x + y)^3$$

où $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque, avec $C(0) = 2$ car $f(1, 0) = 2$.
Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \neq -y, \quad C(y) = \frac{f(x, y)}{(x + y)^3}$$

et en particulier,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad C(y) = \frac{f(y, y)}{8y^3} = \frac{y^3 f(1, 1)}{8y^3} = \frac{f(1, 1)}{8},$$

ce qui prouve que C est constante sur $\mathbb{R}^*$. En conclusion,

$$f(x, y) = 2(x + y)^3 \text{ où } k = \begin{cases} 2 & \text{si } y = 0 \\ \text{Cste qcq} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

notées sur deux (2) points.

Exercice 1

4.5 points

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x \sin y, y \cos x)$, et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(u, v) = u^2 + 3v + 1$.

- i. Expliciter $g \circ f(x, y)$, et en déduire $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$;
- ii. Calculer les matrices jacobiniennes $J_{(x,y)}f$ et $J_{(u,v)}g$. En déduire $J_{(x,y)}(g \circ f)$ ainsi que $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$;
- iii. En utilisant la formule de dérivation de « fonctions composées », recalculer $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$.

Exercice 2

4.5 points

Etudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 3

4.5 points

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

à l'aide du changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$.

4.5 points