Algèbre
Ensembles et applications

Denis Vekemans [*]

Exercice 1 Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right. \Longrightarrow B = C.$$

Exercice 2 Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Exercice 3 Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que

1. $$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

2. $$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application qui, à tout entier x, associe $2x$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application qui, à tout entier y, associe $\dfrac{y}{2}$ si y est pair et $\dfrac{y-1}{2}$ sinon.

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et g.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
3. Déterminer $(g \circ f)^n$ et $(f \circ g)^n$.

Exercice 5 On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y).$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
3. Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 6 On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x - y + z).$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f.
2. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
3. Que vaut $f(\mathbb{R}^3)$?

Exercice 7 Soient E, F, G et H quatre ensembles et f, g et h trois applications

$$f : E \longrightarrow F \ ; \ g : F \longrightarrow G \ ; \ h : G \longrightarrow H.$$

Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.

Exercice 8 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 9 Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, par

$$f(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. Déterminer l'application réciproque de f.

Exercice 10 Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F.

A toute partie A de E, on associe son ensemble image : $f(A) = \{y \in F | \exists x \in A, f(x) = y\}$.

On définit ainsi une application (notée encore f) de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$.

A toute partie B de F, on associe son ensemble image réciproque : : $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.

On définit ainsi une application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que pour toute famille $\{A_i, i \in I\}$ de parties de E, on a :

$$f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

2. Montrer que pour toute famille $\{B_i, i \in I\}$ de parties de F, on a :

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}(\overline{B}^F) = \overline{f^{-1}(B)}^E.$$

3. Montrer que l'on a pour tout $X \subset E$ et pour tout $Y \subset F$:

$$X \subset f^{-1}(f(X)),$$

$$f(f^{-1}(Y)) \subset Y.$$

   Donner des exemples dans lesquels ces inclusions sont strictes.

Références

[1] M. Gran, *fiches de TD (L1)*, Université du Littoral Côte d'Opale.

[2] M. Serfati, *Exercices de mathématiques. 1. Algèbre*, Belin, Collection DIA, 1987.

[3] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques – Cours, exercices corrigés – MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses, 2004.