# Résumé

*Université de Batna, Département de Mathématiques,*

*3 ème année Mathématiques (Module EDO)*

Dans tout ce qui suit, $I$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$.

## Définitions

1. L'équation

$$y' = f(t, y) \qquad (E)$$

   est appellée **une équation différentielle du premier ordre** (où bien d'ordre un) sous la forme normale.

2. On dit que $y$ **est une solution de** $(E)$ s'il existe un intervalle non vide $J \subset I$ tel que

   (a) Pour tout $t \in J$ on a $y(t) \in \Omega$.

   (b) $y$ est dérivable sur $J$ et vérifie $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in J$.

3. Soient $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de $(E)$. Si $J \subset \widetilde{J}$ et $y = \widetilde{y}$ sur $J$ alors on dit que $\widetilde{y}$ **est un prolongement de** $y$.

4. Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **solution maximale** si elle n'admet aucun prolongement $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $J \subsetneq \widetilde{J}$. C'est à dire $y$ est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible.

5. Si la solution $y$ de $(E)$ est définie sur tout $I$ (ie. $J = I$) alors on dit que $y$ est **une solution globale.**

6. L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appellée **une condition initiale de l'équation** $(E)$.

7. Le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \qquad (PC)$$

   est appellé **problème de Cauchy.**

8. Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que $f$ est une fonction **Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $C$** s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$$

   Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que $f$ est **une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$.**

9. On dit que $f$ est une fonction **localement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$** si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ ils existent $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et $f$ est une fonction Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $C$.

# Résultats

1. *Lemme de Gronwall :* Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a, b])$. On suppose que
$$\psi(t) \leq c + d \int_a^t \psi(u)\, du \text{ pour tout } t \in [a, b].$$
   Alors $\psi(t) \leq c e^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a, b]$.

2. *Régularité de la solution :* Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k(I \times \Omega)$ alors toute solution $y$ de $y' = f(t, y)$ est de classe $C^{k+1}(J)$. Ici, $J$ est le l'intervalle de définition de $y$.

3. *Intervalle de définition d'une solution maximale : Si* $f$ est une fonction continue sur $I \times \Omega$ alors l'intervalle de définition $J$ de toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est ouvert.

4. *Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy :* Soient $J$ un intervalle non vide de $I$ et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C^0(I \times \Omega)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) $y$ est une solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

(b) $y$ est une fonction continue sur $J$, pour tout $t \in J$ on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du$.

5. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Soit $y$ une solution de $(E)$ définie sur $]\alpha, +\infty[$. Si $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} \alpha} y(t)$ n'existe pas alors $y$ est une solution maximale.

   (b) Soit $y$ une solution de $(E)$ définie sur $]-\infty, \beta[$. Si $\lim\limits_{t \xrightarrow{<} \beta} y(t)$ n'existe pas alors $y$ est une solution maximale.

6. Toute solution $y$ de $(E)$ se prolonge en une solution maximale $\widetilde{y}$. En général, ce prolongement n'est pas unique.

7. La solution globale est une solution maximale. Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales.

8. *Théorème de Cauchy-Piano-Arzela :* On suppose que $f$ est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Soit $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ alors le problème de Cauchy $(PC)$ admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et $M := \max\limits_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$. Cette solution est appellée solution locale.

9. Si $f$ est une fonction continue sur $I \times \Omega$ alors le problème de Cauchy $(PC)$ admet une solution maximale.

10. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors $f$ est localement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$.

11. *Théorème de Cauchy-Lipschitz :* On suppose que $f$ est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$. Alors, le problème de Cauchy $(PC)$ admet une solution unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ avec $T_0, r_0 > 0$ tel que $f$ soit Lipschitzienne par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ et $M = \sup\limits_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$.

12. Soit $f$ une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$. Soient $y_1$ une solution de $(E)$ définie sur $J_1$ et $y_2$ une solution de $(E)$ définie sur $J_2$. S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

13. Si $f$ est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$ alors le problème de Cauchy $(PC)$ admet une solution maximale unique.

14. Si $f$ est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $I \times \Omega$ alors les graphes de deux solutions maximales sont ou bien confondus ou bien disjoints.

15. Soit $f$ une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c, k : I \to R_+$ telles que

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

alors toute solution maximale de $(E)$ est globale.

16. Soit $f$ une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipshitzienne, par rapport à $y$ de rapport $k$ avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy $(PC)$ admet une solution globale unique.

# Exercices

*Université de Batna, Département de Mathématiques,*

*3 ème année Mathématiques (Module EDO)*

1. Montrer le résultat 5.

2. Est ce que la fonction $y$ définie sur $]1,+\infty[$ par $y(t)=\frac{1}{1-t}$ est une solution de $y^{'}=y^2$. Est ce que c'est une solution maximale (Justifier). Est ce que c'est une solution globale (Justifier)

   Même questions pour

   (a) La fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $y(t)=t$. L'équation $y^{'}=\frac{t}{y}$.

   (b) La fonction $y$ définie sur $]-\infty,2]$ par $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$. L'équation $y^{'}=y^3$.

   (c) La fonction $y$ définie sur $]2,+\infty[$ par $y(t)=\frac{1}{t}$. L'équation $y^{'}=-y^2$.

   (d) La fonction nulle sur $\mathbb{R}$. L'équation $y^{'}=y$. (Utiliser deux méthodes pour montrer que la solution est maximale)

   (e) La fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=e^{2t}$. L'équation $y^{'}=2y$.

   (f) La fonction $y$ définie sur $[3,9]$ par $y(t)=e^{2t}$. L'équation $y^{'}=2y$. (Utiliser deux méthodes pour montrer que la solution n'est pas maximale)

3. Considérons sur $I=]0,+\infty[$ l'équation $y^{'}=\frac{2y}{t}$. Soit $y:J=]3,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une solution définie par $y(t)=t^2$. Montrer que la solution $\widetilde{y}:\widetilde{J}=]2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\widetilde{y}(t)=t^2$ est un prolongement de $y$.

4. On considère sur $I=\mathbb{R}$ l'équation $y^{'}=2\sqrt{|y|}$. Soit $y$ une solution définie sur $J=\left]\frac{-1}{2},0\right[$ par $y(t)=0$. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha\leq-1$ et $\beta\geq1$ et on considère les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ définies par

$$\widetilde{y}_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}(t-\beta)^2 & \text{si } t\geq\beta,\\ 0 & \text{si } \alpha\leq t\leq\beta,\\ -(t-\alpha)^2 & \text{si } t\leq\alpha,\end{cases}$$

Montrer que les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ sont des solutions maximales qui prolongent $y$. Que peut on déduire.

5. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'} = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution locale.

6. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'} = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ admet les deux solutions maximales $y_1$ et $y_2$ définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = |t|\, t$. Que peut on déduire. *Remarquer que la fonction $y_2$ est de classe* $C^1(\mathbb{R})$ (A le faire).

7. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \times ]1, +\infty[$ par $f(t, y) = \frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $\mathbb{R} \times ]1, +\infty[$.

8. Montrer, en utilisant deux méthodes, que la fonction $f$ définie par $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à $y$ uniformément par rapport à $t$, sur $\mathbb{R}^2$.

9. Montrer que toutes les solutions de $y^{'} = t\sqrt{t^2 + y^2}$ sont globales.

10. Considérons l'équation $y^{'} = a(t)\, y + b(t)$ où $a, b$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Sans calculer la solution, montrer le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'} = a(t)\, y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique de classe $C^2(\mathbb{R})$.

**Références :**

[$De$] J. P. Démaily, Analyse numérique et équations différentielles

[$Be$] S. Benzoni, Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés. Dunod Paris 2010.

HAMCHI Ilhem (hamchi_ilhem@yahoo.fr)

Département de Mathématiques, Université de Batna