Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématique

Année 2016-2017
Optimisation
3ème Année MATHS

Examen final

Questions de cours [5 pts]

1. Rappeler la définition d'un minimum local d'une fonction à plusieurs variables.
2. Soit A une matrice réelle carrée symétrique définie négative. Montrer que A est inversible.
3. Soit A une matrice réelle carrée inversible. Soit $B = {}^tAA$. Montrer que $< Bx, x >$ est une fonction coercive.
4. Soit f une fonction à plusieurs variables convexe. Soient x^* et y^* sont des minimums locaux de f. Montrer que tout point sur le segment $[x^*, y^*]$ est un minimum global de f.

Exercice 1 [8 pts]

Soient la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + mxy - 8x - 2y + 3, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. *Soit $m = 7$. Montrer que f_7 n'est pas coercive.*
2. *Soit $m = 2$. Montrer que f_2 est coercive (infinie à l'infini). Que peut-on déduire sur f_2? Justifier.*
3. *Soit $m = 4$. Déterminer les points stationnaires de f_4 et leur nature. (min local, max local, point-selle).*
4. *La fonction f_4 est elle convexe? Justifier. Qu'est ce qu'on peut déduire?*
5. *Soit l'ensemble $S = \{(x;y) : xy \geq 0; x^2 + y^2 \leq 4\}$ de $\mathbb{R}^2$. Représenter S, est-il compact? est-il convexe?*
6. *f_7 admet-elle un minimum global sur S? Justifier?*
7. *Ecrire f sous la forme $f(x) = < Ax, x > - < b, x > + c$ où A est symétrique. Déduire les valeurs de m pour que f soit convexe, et coercive.*

Exercice 2 [5 pts]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. *Montrer que f est coercive.*
2. *f est-elle convexe ?*
3. *Résoudre le problème d'optimisation $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$*

Exercice 3 [4 pts]

Ecrire une fonction implémentant la méthode de Newton avec le langae R qui recoit comme arguments:
f : une fonction de classe C^∞ à minimiser. *a, b : les bornes de l'intervalle.*
eps : la précision demandée pour la dérivée. *h : Le paramètre pour la dérivation numérique.*
It : nombre d'itérations maximal(à ne pas dépasser).
Newton=function(f,a,b,eps,h,It)={...}

La fonction doit retourner un objet qui comporte trois valeurs, le point de minimum, la valeur minimal[e,] nombre d'itérations nécessaire.

Rappel: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$; $f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

Bon courage.

Le barème est donné à titre i[ndicatif]

Examen final

Questions de cours [5 pts]

1. Rappeler la définition d'un minimum local d'une fonction à plusieurs variables.
2. Soit A une matrice réelle carrée symétrique définie négative. Montrer que A est inversible.
3. Soit A une matrice réelle carrée inversible. Soit $B = {}^tAA$. Montrer que $< Bx, x >$ est une fonction
4. Soit f une fonction à plusieurs variables convexe. Soient x^* et y^* sont des minimums locaux de f. que tout point sur le segment $[x^*, y^*]$ est un minimum global de f.

Exercice **1** [*8 pts*] *Soient la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f_m(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + mxy - 8x - 2y + 3, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. *Soit $m = 7$. Montrer que f_7 n'est pas coercive.*
2. *Soit $m = 2$. Montrer que f_2 est coercive (infinie à l'infini). Que peut-on déduire sur f_2? Justifier.*
3. *Soit $m = 4$. Déterminer les points stationnaires de f_4 et leur nature. (min local, max local, point-*
4. *La fonction f_4 est elle convexe? Justifier. Qu'est ce qu'on peut déduire?*
5. *Soit l'ensemble $S = \{(x; y) : xy \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ de $\mathbb{R}^2$. Représenter S, est-il compact? est-il co*
6. *f_7 admet-elle un minimum global sur S? Justifier?*
7. *Ecrire f sous la forme $f(x) = < Ax, x > - < b, x > +c$ où A est symétrique. Déduire les valeu* *... f soit convexe et coercive.*

1. Montrer que f_7 n'est pas coercive.
2. Soit $m = 2$. Montrer que f_2 est coercive (infinie à l'infini). Que peut-on déduire sur f_2? Justifier.
3. Soit $m = 4$. Déterminer les points stationnaires de f_4 et leur nature. (min local, max local, point-selle).
4. La fonction f_4 est elle convexe? Justifier. Qu'est ce qu'on peut déduire?
5. Soit l'ensemble $S = \{(x;y) : xy \geq 0; x^2 + y^2 \leq 4\}$ de $\mathbb{R}^2$. Représenter S, est-il compact? est-il convexe?
6. f_7 admet-elle un minimum global sur S? Justifier?
7. Ecrire f sous la forme $f(x) = < Ax, x > - < b, x > + c$ où A est symétrique. Déduire les valeurs de m que f soit convexe, et coercive.

Exercice **2**. [**5 pts**] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Montrer que f est coercive.
2. f est-elle convexe ?
3. Résoudre le problème d'optimisation $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$

Exercice **3**. [**4 pts**]

Ecrire une fonction implémentant la méthode de Newton avec le langage R qui recoit comme arguments:

f : une fonction de classe C^∞ à minimiser a, b : les bornes de l'intervalle

eps : la précision demandée pour la dérivée h : Le paramètre pour la dérivation numérique.

It : nombre d'itérations maximal(à ne pas dépasser)

Newton=function(f,a,b,eps,h,It)={...}

La fonction doit retourner un objet qui comporte trois valeurs, le point de minimum, la valeur
nombre d'itérations nécessaire.

Rappel: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$; $f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$